

## Corrigé 26

<http://rose.epfl.ch/page63506.html>

### Exercice 1

- a) On suppose que la tournée  $K$  passe par les arêtes  $[i, j]$  et  $[i, k]$ . A l'aide de l'inégalité triangulaire, en court-circuitant cette tournée en prenant l'arête  $[j, k]$ , on diminue le coût de la tournée, mais cette tournée ne passe plus par le sommet  $i$ .

On choisit alors tous les sommets par lesquelles la tournée  $K$  passe plus d'une fois et on court-circuite à chaque fois ce sommet, ce qui va nécessairement baisser le coût et on obtiendra une tournée  $K'$  qui passe exactement une fois par chaque sommet.

- b) Puisque le nombre de sommet est pair, on peut diviser la tournée  $K$  en exactement deux couplages disjoints (on prend à chaque fois une arête sur deux). Soit  $M_1$  et  $M_2$  ces deux couplages et soit  $M$  le couplage de coût minimum. On a

$$c(M_1) + c(M_2) = c(K) \quad \implies \quad c(M) \leq \min(c(M_1), c(M_2)) \leq \frac{1}{2}c(K)$$

Dans le cas d'un graphe avec un nombre impair de sommet, le principe reste le même, à la différence que  $M$  devient un couplage maximal (touchant tous sauf un sommet) de longueur minimum et l'on partitionne notre tournée  $K$  en 2 couplages maximaux  $M_1$  et  $M_2$  et une arête  $e$ .

### Exercice 2

- a) Lorsqu'on introduit des contraintes d'inégalité du type  $g_i(\underline{x}) \geq 0$ , on doit encore imposer  $\underline{u} \geq 0$ . La formulation demandée est:

$$\begin{aligned} Z_R(\underline{u}) &= \min \sum_i \sum_j c_{ij} x_{ij} - \sum_i u_i \underbrace{\left( b_i - \sum_j a_{ij} x_{ij} \right)}_{=g_i(\underline{x})} \\ \text{s.c. } &\sum_i x_{ij} = 1 \quad \forall j \\ &x_{ij} \in \{0, 1\} \quad \forall i, j \end{aligned}$$

Soit  $x^*$  la solution optimale du problème initial. On a bien:

$$Z_R(\underline{u}) \leq \underline{c} x^* - \underbrace{\underline{u}}_{\geq 0} \underbrace{(b - Ax^*)}_{\geq 0} \leq \underline{c} x^*$$

b) En regroupant les termes de manière appropriée, on obtient:

$$Z_R(\underline{u}) = \min \left[ \begin{array}{l} \sum_i (c_{i1} + u_i a_{i1}) x_{i1} \\ \sum_i x_{i1} = 1 \end{array} \right] + \left[ \begin{array}{l} \sum_i (c_{i2} + u_i a_{i2}) x_{i2} \\ \sum_i x_{i2} = 1 \end{array} \right] + \dots - \sum_i u_i b_i$$

où chaque encadré est un problème d'affectation trivial (sans limite de capacité par machine) d'une tâche  $j$  à la machine  $i$  avec le coefficient  $(c_{ij} + u_{ij})$  le plus petit.

### Exercice 3

a) On précise d'abord qu'une fois que la tête d'un train  $i$  entre sur l'axe, il le parcourt à la vitesse  $v_i$  sans arrêt jusqu'à ce que sa fin le quitte. Les variables de décision sont donc les heures d'entrée  $h_i$  des trains.

On peut représenter dans le plan espace×temps le trajet d'un train comme un parallélogramme dont la base serait parallèle à l'axe du temps, et dont les dimensions dépendent de la longueur et de la vitesse de chaque train. Le problème consiste donc à ranger ces parallélogramme dans ce plan de telle manière à ce qu'ils ne s'intersectent pas (leurs bords peuvent se toucher) et que les fenêtres de temps dans laquelle chaque train a le droit de circuler soit respectées.

b) **[Pas pour l'examen]**

On peut trouver une étude détaillée d'une version légèrement plus complexe de ce problème dans l'article:

Bovet J., Constantin C. and de Werra D., *A convoy scheduling problem*,  
Discrete Applied Mathematics, 30, p1-14, 1991.

Vous pouvez passer par <http://library.epfl.ch/periodicals/> si vous souhaitez le télécharger.

En gros, l'idée est de rajouter une variable  $y_{ij}$  pour chaque paire de train  $i < j$  qui partage un bout de tronçon  $I_{ij}$  lors de leur trajet, et on définit que  $y_{ij} = 1$  lorsque  $i$  parcourt  $I_{ij}$  avant  $j$  et  $y_{ij} = 0$  sinon. Dans notre formulation, on pourra à l'aide de cette variable et selon les cas, mettre l'accent sur les contraintes pertinentes. Référez-vous à l'article ci-dessus pour les détails.