Compilé le 5 mai 2008

TEST

Série 23

08.05.2008

Exercice 1

Une entreprise de PC doit gérer un stock pendant un horizon fini de 4 périodes. Le lancement d'une série de production coûte 3 KFr auxquels s'ajoutent un coût unitaire de production de 2 KFr. Le stockage d'un PC pendant une année coûte 1 KFr. La demande pour chaque période est : $\Delta_4 = 4$, $\Delta_3 = 3$, $\Delta_2 = 2$ et $\Delta_1 = 3$. Les stocks initiaux et finaux sont nuls et les demandes sont satisfaites en début de période.

a) Déterminer la politique de production qui minimise les coûts.

Les questions suivantes b) et c) doivent être discutées sans refaire tous les calculs, mais en se basant sur la réponse du point a).

b) Que se passe-t-il si le stock initial est de 2 ?

c) Que se passe-t-il si le stock initial est de 5 et que le coût de stockage par unité est de 3 KFr ?

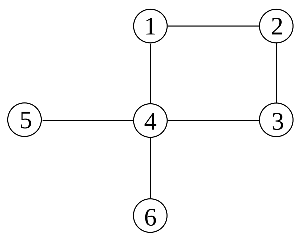
d) D'une manière générale, si on a une capacité de production limitée de M, existe-t-il toujours une solution optimale qui satisfait la condition de Wagner-Whitin ? Justifier.

Exercice 2

Un agent de la circulation doit contrôler le trafic en 6 carrefours d'un réseau donné (voir dessin). Il reste une heure à chaque carrefour, puis choisit au hasard soit de rester où il est, soit d'aller à un des carrefours voisins. Chaque possibilité est choisie avec la même probabilité que les autres (NB : chaque carrefour voisin compte comme une possibilité différente).

a) Dessiner le graphe de transition et indiquer de quel type est la chaîne de Markov associée. Donner la matrice de transition P et expliquer (sans faire les calculs) comment calculer la probabilité qu'il soit au carrefour i pour la $3^{\text{ème}}$ heure s'il était au carrefour 1 à la première heure ($1 \leqslant i \leqslant 6$).

b) Même question qu'en a) si l'agent ne peut choisir lorsqu'il est en i que de rester sur place ou d'aller à l'un des carrefours voisins $j > i$.



Exercice 3

Un libraire achète des copies d'un livre à un éditeur pour les vendre à ses clients. Il les achète 6 Fr par pièce au début de cette année et les vend 15 Fr par pièce. Le stockage des livres au cours de l'année ne lui coûte rien. A la fin de l'année, les livres non vendus sont rachetés par l'éditeur au prix de 1 Fr par pièce.

On donne les probabilités P_i de vendre i livres pendant l'année :

i	2	3	4	5
P_i	0.2	0.3	0.3	0.2

Si, durant l'année, il lui manque des livres pour satisfaire les clients, le libraire peut en acheter d'urgence au prix de 20 Fr par pièce.

a) Combien de livres (nombre entier) le libraire doit-il acheter au début de cette année pour minimiser l'espérance de ses coûts ?

b) Même question dans le cas où la demande est continue avec une densité :

$$f(u) = \begin{cases} \frac{1}{10} & \text{si } 0 \leqslant u \leqslant 10 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

NB : Bien que la demande soit continue, il faut quand-même commander un nombre entier de livres.

Exercice 4

On considère le problème suivant :

> On a un intervalle de longueur $q > 0$ qu'on voudrait diviser en N intervalles dont le produit des longueurs y_i soit maximum.

Résoudre ce problème à l'aide de la programmation dynamique, en spécifiant bien toutes les variables utiles pour définir précisément votre modélisation (X_i, D_i, t_i, etc...).
Indication : résoudre d'abord pour N = 1, 2 et 3, puis en déduire (et prouver) une règle de récurrence pour le cas général.