

Corrigé 26

29.05.2008

Exercice 1

On sait (voir cours) que

$$p_n = \frac{1}{n!} \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^n p_0$$

pour un système à S guichets et pour $n < S$. Si $S \rightarrow \infty$, alors on a toujours $n < S$ et cette relation est vraie pour tout n . On sait également que

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_n = 1 = p_0 \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^n \right)$$

On en déduit

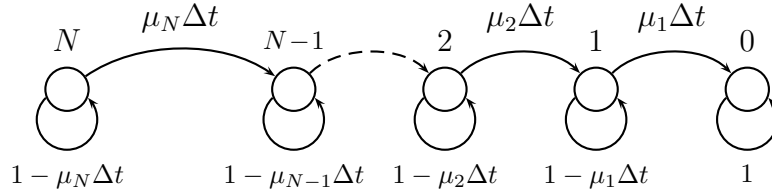
$$\begin{aligned} p_0 &= \frac{1}{e^{\lambda/\mu}} = e^{-\lambda/\mu} \\ p_n &= \frac{1}{n!} \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^n e^{-\lambda/\mu} \end{aligned}$$

On retrouve donc un processus de poisson.

Exercice 2

- a) On définit un processus homogène (c'est-à-dire indépendant du temps).
- La probabilité qu'il y ait un mort dans l'intervalle de temps Δt s'il y a k individus présents est $\mu_k \Delta t + o(\Delta t)$. μ_k est donc le taux de mort. La fonction $o(\Delta t)$ est telle qu'elle a été définie au cours.
 - La probabilité qu'il y ait plusieurs morts dans l'intervalle de temps Δt est $o(\Delta t)$.
 - La probabilité qu'il n'y ait pas de mort dans l'intervalle de temps Δt est $1 - \mu_k \Delta t + o(\Delta t)$.
 - $N(t)$ est le nombre d'individus présents au temps t .

- $p_n(t) = P(N(t) = n)$
- $$\begin{cases} p_N(t + \Delta t) = (\underbrace{1 - \mu_N \Delta t}_{\text{pas de mort}}) p_N(t) + o(\Delta t) \\ p_{N-1}(t + \Delta t) = (\underbrace{1 - \mu_{N-1} \Delta t}_{\text{pas de mort}}) p_{N-1}(t) + \underbrace{\mu_N \Delta t}_{\text{1 mort}} p_N(t) + o(\Delta t) \\ \vdots \\ p_0(t + \Delta t) = p_0(t) + \mu_1 \Delta t p_1(t) + o(\Delta t) \end{cases}$$
- Chaîne de Markov associée :



- Matrice de Transition :

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots \\ \mu_1 \Delta t & 1 - \mu_1 \Delta t & 0 & 0 & \dots & \dots \\ 0 & \mu_2 \Delta t & 1 - \mu_2 \Delta t & 0 & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \mu_3 \Delta t & 1 - \mu_3 \Delta t & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

b)

$$\begin{cases} p'_N(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{p_N(t+\Delta t) - p_N(t)}{\Delta t} = -\mu_N p_N(t) \\ p'_{N-1}(t) = \mu_{N-1} p_{N-1}(t) + \mu_N p_N(t) \\ \vdots \\ p'_0(t) = \mu_1 p_1(t) \end{cases}$$

Conditions aux limites : $p_N(0) = 1$ et $p_i(0) = 0$ pour tout $i \neq N$.

Exercice 3

- a) Processus de naissance avec distribution des apparitions selon loi de Poisson.

$P(k \text{ individus apparaissent dans l'intervalle } [0, t]) = p_k(t) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}$.
Moyenne d'une loi de Poisson = $\lambda = 10$ commandes/jour.

$P(\text{nb de commandes en } t = k) = p_k(t)$,

pour $k = 0$, $p_0(t) = e^{-\lambda t}$

$k = 1$, $p_1(t) = \lambda t e^{-\lambda t}$

$k = 2$, $p_2(t) = \frac{(\lambda t)^2}{2} e^{-\lambda t}$

- b) Pour qu'un régime permanent existe il faut une solution au système suivant :

$$\begin{cases} \frac{dp_0(t)}{dt} = 0 = \lambda p_0 \\ \frac{dp_n(t)}{dt} = 0 = \lambda p_{n-1} - \lambda p_n \\ \sum_i p_i = 1 \end{cases}$$

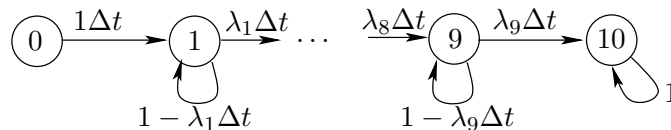
D'après les deux premières équations $p_i = 0 \forall i$; la troisième équation n'étant pas respectée, il n'y a pas de régime permanent.

- c) Il faut respecter un système similaire au précédent avec $\lambda_k = 1 - \frac{k}{10}$:

$$\begin{cases} \frac{dp_0(t)}{dt} = 0 = \lambda p_0 = 0 \\ \frac{dp_1(t)}{dt} = 0 = -\lambda_1 p_1 = -\frac{9}{10} p_1 \\ \frac{dp_2(t)}{dt} = 0 = \lambda_1 p_1 - \lambda_2 p_2 \\ \vdots \\ \frac{dp_{10}(t)}{dt} = 0 = \lambda_9 p_9 - \lambda_{10} p_{10} \\ \frac{dp_{11}(t)}{dt} = 0 = \lambda_{10} p_{10} - \lambda_{11} p_{11} \\ \dots \\ \sum_i p_i = 1 \end{cases}$$

Remarquant que $\lambda_i \neq 0 \quad i \neq 10$, on obtient la solution stationnaire suivante : $p_0 = \dots = p_9 = p_{11} = \dots = 0 \quad p_{10} = 1$

Le graphe associé à la CM dans ce cas est le suivant :



Exercice 4

D'après le cours, on sait que pour tout $n \geq 0$:

$$p_n = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right)$$

Soit \bar{n} le nombre moyen de clients dans le système.

$$\bar{n} = \sum_{n=0}^{\infty} np_n = \left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right) \left(0 \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^0 + 1 \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^1 + 2 \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 + \cdots + n \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n + \cdots\right)$$

$$\bar{n} = \frac{\lambda}{\mu} \left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right) \left(1 + 2\frac{\lambda}{\mu} + \cdots + n \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{n-1} + \cdots\right)$$

Posons $u = \frac{\lambda}{\mu}$. Alors

$$\bar{n} = u(1 - u) (1 + 2u + \cdots + nu^{n-1} + \cdots)$$

On sait que la série $\sum_{n=0}^{\infty} u^n$ est uniformément convergente pour $0 < u < 1$.
On peut donc écrire :

$$\bar{n} = u(1 - u) \frac{d}{du} (u + u^2 + \cdots + u^n + \cdots)$$

$$\bar{n} = u(1 - u) \frac{d}{du} \left(\frac{u}{1 - u}\right)$$

$$\bar{n} = u(1 - u) \frac{1}{(1 - u)^2} = \frac{u}{1 - u}$$

D'où :

$$\bar{n} = \frac{\lambda}{\mu - \lambda}$$

CQFD.