Corrigé 23

08.05.2008

Exercice 1

a) Nous commençons par construire le tableau des coûts c_{ts} de production de PCs pour couvrir la demande de la période t à la période s :

c_{ts}	1	2	3	4
1	9	-	-	-
2	16	7	-	-
3	27	15	9	-
4	43	28	20	11

Nous pouvons maintenant résoudre l'équation de récurrence de la méthode de Wagner-Whitin. J_k est le coût d'une politique de production optimale pour les périodes allant de k à N :

$$\begin{aligned}
J_0 &= 0 \\
J_1 &= c_{11} + J_0 = 9 \\
J_2 &= \min\{c_{22} + J_1, c_{21} + J_0\} = \min\{16, 16\} = 16 \\
J_3 &= \min\{c_{33} + J_2, c_{32} + J_1, c_{31} + J_0\} = \min\{25, 24, 27\} = 24 \\
J_4 &= \min\{c_{44} + J_3, c_{43} + J_2, c_{42} + J_1, c_{41} + J_0\} = 35
\end{aligned}$$

Si D_k est la production au début de la période k, la plan optimal de production trouvé par cette méthode est alors :

$$D_4 = 4,\ D_3 = 5,\ D_2 = 0,\ D_1 = 3$$

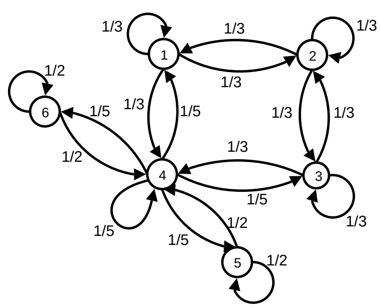
b) Si le stock initial est de 2, alors il suffit de produire $4 - 2 = 2$ PCs au début de la période 4.

c) Dans ces conditions, on a 1 PC, qu'on nommera X, qui ne sera pas vendu à la période 4. On pourrait donc envisager de le stocker pour le vendre à la période 3. Il faut alors se demander à quel moment on produira les autres PCs nécéssaires pour couvrir la commande de la période 3. Les coûts de production ne changent pas entre la période 4 et la période 3 ; donc, pour éviter des coûts de stockage inutiles, il vaut mieux produire ces PCs au début de la période 3. On s'apperçoit alors que stocker le PC X pendant la période 4 est plus cher que d'en produire un en plus au début de la période 3. La meilleure solution est donc de jetter le PC X à la poubelle dès le début de la période 4 et d'en produire un neuf au début de la période 3.

d) Non, pas toujours. Par exemple si l'horizon se compose de deux périodes et si $M = 10$, $\Delta_2 = 9$, $\Delta_1 = 11$ et si X_i est le stock restant à la fin de la période $i+1$, alors on n'a pas de solution optimale telle que $D_1 \cdot X_1 = 0$.

Exercice 2

a) Les différents carrefours correspondent aux états de la chaîne de Markov. Ainsi on peut calculer les p_{ij} (probabilité de passer de l'état i à l'état j) de la matrice de transition $P = (p_{ij})$. Par exemple si l'agent se trouve au carrefour 1 au temps t, il peut rester au carrefour 1 ou aller en 2 ou en 4. Donc $p_{11} = 1/3$, $p_{12} = 1/3$, $p_{14} = 1/3$ et $p_{1j} = 0$ si $j = 3, 6, 7$ (les décisions sont équiprobables).



Comme le graphe de transition est fortement connexe, la chaîne de Markov associée est irréductible.

La matrice de transition P est :

$$P = \begin{bmatrix} 1/3 & 1/3 & 0 & 1/3 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 & 0 \\ 1/5 & 0 & 1/5 & 1/5 & 1/5 & 1/5 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \end{bmatrix}$$

Calculons maintenant la probabilité que l'agent soit au carrefour i pour la $3^{\text{ème}}$ heure sachant qu'il était au carrefour 1 à la première heure. On a le vecteur

$$p^{(1)} = (p_1^{(1)}, p_2^{(1)}, \ldots, p_6^{(1)}) = (1, 0, \ldots, 0)$$

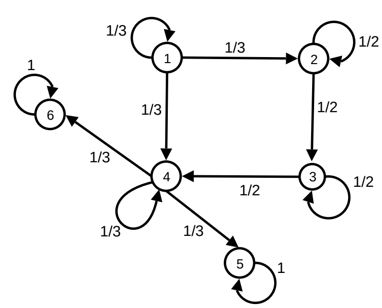
où $p_i^{(1)}$ est la probabilité de trouver l'agent au carrefour i à la première heure. On peux donc calculer

$$p^{(3)} = (p_1^{(3)}, p_2^{(3)}, \ldots, p_6^{(3)}) = p^{(1)} P^2$$

où les $p_i^{(3)}$ $(i = 0, 1, \ldots, 6)$ sont les probabilités cherchées.

b) Ici on a $p_{ij} = 0$ si $j < i$, la matrice de transition devient :

$$\tilde{P} = \begin{bmatrix} 1/3 & 1/3 & 0 & 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



De la même façon qu'en a), $\tilde{p}^{(3)} = p^{(1)} \tilde{P}^2$, où $\tilde{p}_i^{(3)}$ $(i = 0, 1, \ldots, 6)$ est la probabilité que l'agent soit au carrefour i pour la $3^{\text{ème}}$ heure sachant qu'il était au carrefour 1 à la première heure et qu'il ne peut choisir lorsqu'il est en i que parmi les carrefours $j \geqslant i$.

Le graphe de transition n'est pas fortement connexe, de plus tous ses composantes connexes contiennent un seul état. Comme tous les états persistants (états 5 et 6) sont absorbants, la chaîne de Markov associée est absorbante.

Exercice 3

a) Notons $\hat{C}(y)$ l'espérance des coûts du libraire s'il commande y livres au début de l'année. Soient c le coût de commande unitaire, $\hat{h}$ le coût de maintien (stockage $-$ revente) et $\hat{p}$ le coût de pénurie. On a :

$$\hat{C}(y) = c \cdot y + \hat{h} \sum_{u=2}^{y} (y-u) P_u + \hat{p} \sum_{u=y}^{5} (u-y) P_u$$

$$c = 6, \ \hat{h} = -1, \ \hat{p} = 20$$

On suppose que la commande y est dans l'ensemble $\{2, 3, 4, 5\}$. Les résultats indiqués sur le tableau suivant et la convexité de la fonction de coûts justifient cette supposition. Pour chaque y entre 2 et 5, on calcule donc $\hat{C}(y)$ et on trouve :

y	$\hat{C}(y)$
2	42
3	31.8
4	27.3
5	28.5

Le libraire doit donc commander 4 livres.

b) On utilise la formule habituelle, où y^* représente le nombre optimal de livres à commander :

$$\int_0^{y^*} f(u)du = \frac{\hat{p} - c}{\hat{p} + \hat{h}}$$

et on trouve $y^* = 7.37$. Pour connaitre le nombre entier de livres à commander, comme la fonction de coûts est convexe, il suffit de regarder les valeurs autour de notre solution optimale. On a $\hat{C}(7) = 48.55$ et $\hat{C}(8) = 48.8$. Pour minimiser les coûts, il faut donc commander 7 livres.

Exercice 4

Notre problème peut se modéliser ainsi :

$$\max z = \prod_{i=1}^{N} y_i$$

$$S.c \qquad \sum_{i=1}^{N} y_i = q$$

$$y_i \geqslant 0 \quad \forall i = 1, ..., i$$

De manière analogue au problème du sac-à-dos, on peut modéliser ce problème comme un problème de programmation dynamique à N étapes où, à chaque étape i, on doit décider de la valeur de y_i en vue d'un découpage en i morceaux.

On note X_i la variable d'état qui représente la longueur de l'intervalle à disposition à l'étape i et D_i la variable de décision qui représente la longueur attribuée à l'intervalle i ($D_i = y_i$). On note par D_i^* la décision optimale pour l'étape i.

On remarque qu'à chaque étape, sauf à l'étape 1, la solution optimale ne sera jamais égale à 0 ni à la longueur totale disponible car dans ce cas le produit des longueurs des intervalles serait 0 et donc minimal.

La fonction de transfert est :

$$X_{n-1} = t_n(X_n, D_n) = X_n - D_n$$

À l'étape 1, on a :

$$f_1(X_1) = X_1 \text{ et } D_1^* = X_1$$

À l'étape 2, on a :

$$f_2(X_2) = \max_{0\leqslant D_2 \leqslant X_2} D_2 \cdot D_1 = \max_{0\leqslant D_2 \leqslant X_2} D_2 \cdot f_1(X_2 - D_2) = \max_{0\leqslant D_2 \leqslant X_2} D_2 \cdot (X_2 - D_2)$$

Or $D_2 \in [0, X_2]$ et on trouve le max en cherchant le point où la dérivée de la fonction $g(D_2) = (X_2 - D_2)D_2$ est égal à 0. On trouve $g^{'}(D_2) = X_2 - 2D_2$ et

$$g^{'}(D_2) = 0 \Rightarrow D_2^* = \frac{X_2}{2} \Rightarrow f_2(X_2) = \left(\frac{X_2}{2}\right)^2$$

On passe maintenant à l'étape 3 :

$$\begin{aligned} f_3(X_3) &= \max_{0\leqslant D_3 \leqslant X_3} D_3 \cdot D_2 \cdot D_1 \\ &= \max_{0\leqslant D_3 \leqslant X_3} D_3 \cdot f_2(X_3 - D_3) \\ &= \max_{0\leqslant D_3 \leqslant X_3} D_3 \cdot \left(\frac{X_3 - D_3}{2}\right)^2 \end{aligned}$$

On trouve le maximum de la même façon qu'avant et on obtient

$$D_3^* = \frac{X_3}{3} \Rightarrow f_3(X_3) = \left(\frac{X_3}{3}\right)^3$$

On suppose maintenant que $D_{n-1}^* = \frac{X_{n-1}}{n-1}$ et donc que

$$f_{n-1}(X_{n-1}) = \left(\frac{X_{n-1}}{n-1}\right)^{n-1}$$

et on montre par récurrence que c'est vrai pour n. Pour $n = 2$ on l'a déjà montré. Pour un n quelconque on a :

$$\begin{aligned} f_n(X_n) &= \max_{0 \leqslant D_n \leqslant X_n} \{D_n \cdot f_{n-1}(X_n - D_n)\} \\ &= \max_{0 \leqslant D_n \leqslant X_n} \left\{ D_n \cdot \left(\frac{X_n - D_n}{n-1}\right)^{n-1} \right\} \end{aligned}$$

Finalement, on a bien à chaque étape i (i allant de 1 à N) que :

$$\begin{aligned} f_i(X_i) = \max w = &\prod_{k=1}^{i} y_k \\ S.c \qquad &\sum_{k=1}^{i} y_k = X_i \\ &y_k \geqslant 0 \quad \forall k = 1, ..., N \end{aligned}$$

On trouve le maximum en cherchant le point où la derivée de la fonction

$$g(D_n) := D_n \cdot \left(\frac{X_n - D_n}{n-1}\right)^{n-1}$$

s'annule. On trouve

$$g^{'}(D_n) = \left(\frac{X_n - D_n}{n-1}\right)^{(n-2)} \left(-D_n + \frac{X_n - D_n}{n-1}\right)$$

Alors

$$g^{'}(D_n) = 0 \Rightarrow D_n^* = \frac{X_n}{n} \Rightarrow f_n(X_n) = \left(\frac{X_n}{n}\right)^n$$

et le résultat est donc montré pour n.

Donc la solution optimale pour un intervalle de longueur $q > 0$ à diviser en N intervalles est une division en N intervalles identiques de longueur q/N et $z = (q/N)^N$.