Compilé le 28 avril 2008

Corrigé 22

24.04.2008

Exercice 1

Il s'agit d'appliquer le modèle stochastique sans coût fixe et à horizon infini vu au cours du 17.04.2008. On cherche donc un y^* tel que :

$$\int_0^{y^*} f_\Delta(u)du = \frac{\hat{p} - (1-\alpha)c}{\hat{p} + \hat{h}}$$

Appliqué à notre problème, nous avons $x = 8$, $c = 1000$, $\hat{p} = 1500$ et $\hat{h} = 100$, et cela donne :

$$\int_0^{y^*} \frac{1}{20}du = \frac{y^*}{20} = \frac{1500 - (1-0.95)1000}{1500 + 100} = \frac{1450}{1600} \quad \Rightarrow \quad y^* = 18.125$$

Il faut donc commander initialement $y^* - x = 10.125$ tonnes.

Exercice 2

Il s'agit d'appliquer le modèle stochastique sans coût fixe et à une période. On cherche donc un y^* tel que :

$$\int_0^{y^*} f_\Delta(u)du = \frac{\hat{p} - c}{\hat{p} + \hat{h}}$$

Appliqué à notre problème, nous avons $x = 200$, $c = 5000$, $\hat{p} = 7000$ et $\hat{h} = -1000$, et cela donne :

$$\frac{\hat{p} - c}{\hat{p} + \hat{h}} = \frac{7000 - 5000}{7000 - 1000} = \frac{1}{3} \quad \Rightarrow \quad y^* \in [500, 750]$$

On peut donc calculer pour $y^* \in [500, 750]$:

$$\begin{aligned}
\int_0^{y^*} f_\Delta(u)du &= \frac{1}{2}(y^* - 500)\frac{1}{250^2}(y^* - 500) \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{y^*}{250}\right)^2 - \frac{1}{2}\,\frac{1000y^*}{250^2} + \frac{1}{2}\left(\frac{500}{250}\right)^2 \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{y^*}{250}\right)^2 - \frac{2y^*}{250} + 2
\end{aligned}$$

Finalement, en résolvant $\frac{1}{2}\left(\frac{y^*}{250}\right)^2 - \frac{2y^*}{250} + 2 = \frac{1}{3}$, on obtient que $y^* \cong 704.12$. La politique optimale consiste donc a commander $y^* - x \cong 504.12$ kilolitres de bières.

Exercice 3

Rappel : (du début du chapitre IV) Soit $g(y) = \int_{a(y)}^{b(y)} f(u,y)du$ et les bonnes conditions réunies (cf. cours d'analyse), on a :

$$\frac{d\ g(y)}{dy} = f(b(y),y)\frac{d\ b(y)}{dy} - f(a(y),y)\frac{d\ a(y)}{dy} + \int_{a(y)}^{b(y)} \frac{d\ f(u,y)}{dy}\ du$$

On a :

$$\hat{L}(y) = \underbrace{\int_y^\infty \hat{p}(u-y)f(u)du}_{A(y)} + \underbrace{\int_0^y \hat{h}(y-u)f(u)du}_{B(y)}$$

On a en particulier :

$$A(y) = \int_y^M \hat{p}(u-y)f(u)du$$

On utilise ensuite le rappel pour dériver deux fois $A_k(y)$:

$$\begin{aligned}
\frac{dA(y)}{dy} &= \hat{p}(M-y)f(M)\underbrace{\frac{d\ M}{dy}}_{=0} - \underbrace{\hat{p}(y-y)}_{=0} f(y)\cdot(1) + \int_y^M -\hat{p}\,'(u-y)f(u)du \\
&= -\int_y^M \hat{p}\,'(u-y)f(u)du \\
\frac{d^2A(y)}{dy^2} &= (-1)\ \hat{p}\,'(M-y)f(M)\underbrace{\frac{d\ M}{dy}}_{=0} - (-1)\ \hat{p}\,'(y-y)f(y)\cdot(1) + \int_y^M \hat{p}\,''(u-y)f(u)du \\
&= \underbrace{\hat{p}\,'(y-y)}_{\geqslant 0}\underbrace{f(y)}_{\geqslant 0} + \int_y^M \underbrace{\hat{p}\,''(u-y)}_{\geqslant 0}\underbrace{f(u)}_{\geqslant 0}du \quad \geqslant 0
\end{aligned}$$

On fait de même pour $\frac{d^2B(y)}{dy^2} \geqslant 0$. Ainsi nous avons que $\frac{d^2}{dy^2}\hat{L}(y) \geqslant 0$, et donc $\hat{L}$ est convexe.

Complément LaTeX

Comme certains nous l'ont demandé, voici *une* solution pour écrire à l'envers en LaTeX, en utilisant le package *pstricks* :

```
% dans l'en-tête
\usepackage{pstricks}
...
% dans le texte (laissez une ligne vide avant)
\psscalebox{-1 1}{
    \parbox{\linewidth}{
        bla bla bla...
    }
}
```