

b) Le Théorème des écarts complémentaires se formule en général :

Soit \underline{x} solution admissible de (P) et $\underline{\lambda}$ solution admissible de (D), alors

$$\underline{x} \text{ et } \underline{\lambda} \text{ sont optimale} \iff \begin{cases} \underline{\lambda}(\underline{b} - A\underline{x}) = 0 & (1) \\ (\underline{\lambda}A - \underline{c})\underline{x} = 0 & (2) \end{cases}$$

Lorsqu'on l'applique au P.L. (sous forme standard) du point a), on remarque que si x est une solution admissible, alors (1) est toujours satisfaite (car $A\underline{x} = \underline{b}$), et on a donc que pour des solutions admissibles \underline{x} et $\underline{\lambda}$, \underline{x} et $\underline{\lambda}$ sont optimales $\iff (\underline{\lambda}A - \underline{c})\underline{x} = 0$.

Exercice 3

- a) Les solutions optimales primale et duale se lisent dans le tableau optimal. La solution primale est : $x_1^* = 4/5$ et $x_2^* = 7/5$ ($x_3^* = x_4^* = 0$, $x_5^* = 49/5$). La solution duale est : $\lambda_1^* = 2/5$, $\lambda_2^* = 7/10$ et $\lambda_3^* = 0$. La valeur de ces solutions est $z^* = w^* = 37/5$.
- b) Si un coefficient de \underline{c} est modifié, la base actuelle reste optimale tant que les coûts réduits des variables hors base restent non négatifs, c.-à-d. tant que

$$-\gamma_N = \underline{c}'_B \mathbf{B}^{-1} \mathbf{N} - \underline{c}'_N \geq \mathbf{0}.$$

La base (ordonnée) optimale étant $\mathcal{B} = \{a^2, a^1, a^5\}$, on a

$$-\gamma_N = \begin{pmatrix} -\gamma_3 \\ -\gamma_4 \end{pmatrix}, \quad \underline{c}'_B = (c'_2 \quad c'_1 \quad c'_5), \quad \underline{c}'_N = (c'_3 \quad c'_4)$$

et

$$\mathbf{B}^{-1} \mathbf{N} = \begin{pmatrix} 2/5 & -3/10 & 0 \\ -1/5 & 2/5 & 0 \\ 4/5 & -11/10 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/5 & -3/10 \\ -1/5 & 2/5 \\ 4/5 & -11/10 \end{pmatrix}.$$

REMARQUE. La matrice $\mathbf{B}^{-1} \mathbf{N}$ correspond aux colonnes hors base du tableau optimal. Si on modifie le coefficient c_1 de x_1 , la base actuelle reste optimale tant que

$$\begin{pmatrix} -\gamma_3 \\ -\gamma_4 \end{pmatrix} = (3 \quad c_1 \quad 0) \begin{pmatrix} 2/5 & -3/10 \\ -1/5 & 2/5 \\ 4/5 & -11/10 \end{pmatrix} - (0 \quad 0) \geq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} c_1 \leq 6 \\ c_1 \geq 9/4 \end{cases}$$

Ainsi la base actuelle reste optimale tant que $c_1 \in [9/4, 6]$.

- c) Sous forme standard, la contrainte $-x_1 + 2x_2 \leq 1$ s'écrit $-x_1 + 2x_2 + x_6 = 1$ avec $x_6 \geq 0$. Du tableau optimal, on tire $x_1 = \frac{4}{5} + \frac{1}{5}x_3 - \frac{2}{5}x_4$ et $x_2 = \frac{7}{5} - \frac{2}{5}x_3 + \frac{3}{10}x_4$. Dans la base $\mathcal{B} = \{1, 2, 5, 6\}$, la nouvelle contrainte s'écrit donc $-x_3 + x_4 + x_6 = -1$. En rajoutant cette équation au tableau optimal du problème on obtient :

		$-x_3$	$-x_4$	
		37/5	2/5	7/10
x_2		7/5	2/5	-3/10
x_1		4/5	-1/5	2/5
x_5		49/5	4/5	-11/10
x_6		-1	-1	1

Ce tableau n'est plus admissible mais en appliquant l'algorithme dual du simplexe, on obtient, après pivotage, le nouveau tableau optimal :

$$T'_{opt} = \begin{array}{c|cc} & -x_6 & -x_4 \\ \hline & 7 & 2/5 & 11/10 \\ \hline x_2 & 1 & 2/5 & 1/10 \\ x_1 & 1 & -1/5 & 1/5 \\ x_5 & 9 & 4/5 & -3/10 \\ x_3 & 1 & -1 & -1 \end{array}$$

La nouvelle solution optimale primale est : $x_1^* = 1$ et $x_2^* = 1$ ($x_3^* = 1$, $x_4^* = 0$, $x_5^* = 9$ et $x_6^* = 0$). La solution optimale duale est : $\lambda_1^* = 0$, $\lambda_2^* = 11/10$, $\lambda_3^* = 0$ et $\lambda_4^* = 2/5$. La valeur de ces solutions est $z^* = w^* = 7$.

Exercice 4

Pour le système $A\underline{x} \leq \underline{b}$:

$$\begin{cases} -x_1 & -2x_2 & -2x_3 & -x_4 & \leq & -8 \\ x_1 & -2x_2 & +x_3 & +6x_4 & \leq & 3 \\ 2x_1 & +8x_2 & +5x_3 & -3x_4 & \leq & 28 \end{cases}$$

nous appliquons la méthode d'élimination des variables de Fourier-Motzkin :

$$\begin{cases} x_1 \geq & 8 & -2x_2 & -2x_3 & -x_4 \\ x_1 \leq & 3 & +2x_2 & -x_3 & -6x_4 \\ x_1 \leq & 14 & -4x_2 & -\frac{5}{2}x_3 & +\frac{3}{2}x_4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 8 & -2x_2 & -2x_3 & -x_4 & \leq & x_1 & \leq & 3 & +2x_2 & -x_3 & -6x_4 \\ 8 & -2x_2 & -2x_3 & -x_4 & \leq & x_1 & \leq & 14 & -4x_2 & -\frac{5}{2}x_3 & +\frac{3}{2}x_4 \end{cases} \quad (1)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 4x_2 \geq & 5 & -x_3 & +5x_4 \\ 4x_2 \leq & 12 & -x_3 & +5x_4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad 5 \quad -x_3 \quad +5x_4 \leq 4x_2 \leq 12 \quad -x_3 \quad +5x_4 \quad (2)$$

$$\Rightarrow \quad 5 \leq 12$$

Cette dernière équation trivialement vérifiée nous indique qu'il existe une solution au système. Pour en trouver une explicitement, on commence par poser par exemple $x_3 = x_4 = 0$, puis on remonte. On utilise (2), qui nous indique alors que $5 \leq 4x_2 \leq 12$. On choisit par exemple $x_2 = 2$, et pareil avec les deux équations de (1) pour choisir $x_1 = 4$. On a donc au final la solution $\underline{x} = (4, 2, 0, 0)$.