

## Corrigé 7

08.11.2007

### Rappel Important

A une base  $B = (\underline{a}^{B(1)}, \underline{a}^{B(2)}, \dots, \underline{a}^{B(m)})$  (pour un problème avec  $m$  contraintes) correspondent le tableau et les solutions basiques suivante:

$$z = \begin{array}{|c|c|} \hline \underline{c}_B B^{-1} \underline{b} & \overset{-\underline{x}_N}{\underline{c}_B B^{-1} N - \underline{c}_N} \\ \hline B^{-1} \underline{b} & B^{-1} N \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{l} \underline{x}_B = B^{-1} \underline{b} \\ \underline{x}_N = \underline{0} \\ \lambda = \underline{c}_B B^{-1} \end{array}$$

### Exercice 1

Pour que la base courante  $B = (\underline{a}^3, \underline{a}^1)$  reste optimale, il faut que tous les coefficients du bloc supérieure droite du tableau correspondant à cet base reste non-négatif.

$$0 \leq \underline{c}_B (B^{-1} N) - \underline{c}_N = (c_3 \quad 5) \begin{pmatrix} -1/3 & 2/3 \\ 1/3 & 4/3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/3 c_3 + 5/3 - 0 \\ 2/3 c_3 + 20/3 - 6 \end{pmatrix}$$

Cela nous donne que  $-1 \leq c_3 \leq 5$ .

### Exercice 2

- a) Voici une formulation du problème (sous forme standard), où  $x_i$  ( $i \in \{1, 2\}$ ) et le nombre de *dizaine* de pièces de type  $i$  que l'on produit:

$$\begin{array}{rcll} \max z = & 3 x_1 & + 2 x_2 & \\ \text{s.c.} & 2 x_1 & + 3 x_2 & + x_3 = 10 \\ & 4 x_1 & + x_2 & + x_4 = 8 \\ & 3 x_1 & + 5 x_2 & + x_5 = 15 \\ & & & x_i \geq 0 \end{array}$$

On obtient ensuite les tableaux suivants:

Tableau initial

$$z = \begin{array}{|c|c|c|} \hline & -x_1 & -x_2 \\ \hline 0 & -3 & -2 \\ \hline y_1 = 10 & 2 & 3 \\ y_2 = 8 & 4 & 1 \\ y_3 = 15 & 3 & 5 \\ \hline \end{array}$$

Tableau optimal

$$z = \begin{array}{|c|c|c|} \hline & -y_2 & -y_3 \\ \hline 147 & 9 & 5 \\ \hline y_1 = 12 & -1 & -10 \\ x_1 = 25 & 5 & -1 \\ x_2 = 36 & -3 & 4 \\ \hline \end{array} \quad /17$$

Avec la solution optimale  $x_1 = 25/17$ ,  $x_2 = 36/17$  en dizaine et  $z = 147/17$  en Kfr.

- b) La première contrainte devient  $2x_1 + 3x_2 \leq 11$  et on a  $\underline{b}' = (11, 8, 15)$ . De plus, pour la base actuelle on trouve  $B$  et  $B^{-1}$  (on calcule cette dernière matrice par la méthode d'inversion de matrice habituelle).

$$B = (\underline{a}^3, \underline{a}^1, \underline{a}^2) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 3 & 5 \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad B = \frac{1}{17} \begin{pmatrix} 17 & -1 & -10 \\ 0 & 5 & -1 \\ 0 & -3 & 4 \end{pmatrix}$$

On calcule maintenant  $B^{-1}\underline{b}'$  (le bloc inférieure gauche du tableau) pour vérifier que la base  $B$  soit toujours optimale avec  $\underline{b}'$ . Le bloc supérieur droite quant à lui n'est pas modifié par  $\underline{b}'$ , donc il n'y a rien à vérifier.

$$B^{-1}\underline{b}' = \frac{1}{17} \begin{pmatrix} 29 \\ 25 \\ 36 \end{pmatrix} \geq 0 \quad \Rightarrow \text{admissible, donc } B \text{ reste optimale}$$

On calcule maintenant la nouvelle valeur de la fonction objective  $z' = \underline{c}_B B^{-1}\underline{b}' = \frac{147}{17}$  (où  $\underline{c}_B = (0, 3, 2)$ ). Comme il n'y a pas de différence, la sous-traitance n'est pas rentable.

Et si on modifie  $b_2$ , on a  $\underline{b}'' = (10, 9, 15)$ ,  $B^{-1}\underline{b}'' = \frac{1}{17}(11, 30, 33)$  et  $z'' = \underline{c}_B B^{-1}\underline{b}'' = \frac{156}{17}$ . On a donc un gain de  $\frac{9}{17}$ , qui est plus petit que 1, le prix de la sous-traitance. Donc on ne sous-traite pas.

- c) Avec cette nouvelle pièce  $C$ , on a  $\underline{a}^6 = (2, 1, 2)$  et  $c_6 = 2$ . On rajoute donc à la droite du tableau une nouvelle colonne en calculant  $B^{-1}\underline{a}^6 = \frac{1}{17}(13, 3, 5)$  et  $z_6 - c_6 = \underline{c}_B B^{-1}\underline{a}^6 - c_6 = \frac{19}{17} - 2 = -\frac{15}{17} < 0$ . Comme la solution n'est plus optimal, il va falloir appliquer à nouveau l'algorithme primal du simplexe.

$$\begin{array}{l} z = \\ y_1 = \\ x_1 = \\ x_2 = \end{array} \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline & -y_2 & -y_3 & -x_3 \\ \hline 147 & 9 & 5 & -15 \\ \hline 12 & -1 & -10 & 13 \\ \hline 25 & 5 & -1 & 3 \\ \hline 36 & -3 & 4 & 5 \\ \hline \end{array} \quad /17 \quad \rightarrow \quad \begin{array}{l} z = \\ x_3 = \\ x_1 = \\ y_3 = \end{array} \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline & -y_2 & -x_2 & -y_1 \\ \hline 66 & 2 & 5 & 5 \\ \hline 24 & -2 & 10 & 4 \\ \hline 6 & 2 & -1 & -1 \\ \hline 24 & -2 & 13 & -5 \\ \hline \end{array} \quad /6$$

La nouvelle solution optimale est donc  $x_1 = 1$  et  $x_2 = 0$  et  $x_3 = 4$  (pour le nouveau type de pièce  $C$ ).

- d) On a la nouvelle contrainte  $0.5x_1 + 0.4x_2 \leq 1.0$ . Pour pouvoir la rajouter au tableau, il faut d'abord la mettre sous la bonne forme. Après quoi on constate qu'on doit encore appliquer l'algorithme dual du simplexe pour trouver le nouvel optimum en  $x_1 = 2$  et  $x_2 = 0$ .

$$y_4 = 1.0 - 0.5 \frac{1}{17}(25 - 5y_2 + y_3) - 0.4 \frac{1}{17}(36 + 3y_2 - 4y_3) = -\frac{99}{170} + \frac{13}{170}y_2 + \frac{11}{170}y_3$$

$$\begin{array}{l} z = \\ y_1 = \\ x_1 = \\ x_2 = \\ y_4 = \end{array} \begin{array}{|c|c|c|} \hline & -y_2 & -y_3 \\ \hline 1470 & 90 & 50 \\ \hline 120 & -10 & -100 \\ \hline 250 & 50 & -10 \\ \hline 360 & -30 & 40 \\ \hline -99 & -13 & -11 \\ \hline \end{array} \quad /170 \quad \rightarrow \quad \begin{array}{l} z = \\ y_1 = \\ x_1 = \\ x_2 = \\ y_3 = \end{array} \begin{array}{|c|c|c|} \hline & -y_2 & -y_4 \\ \hline 660 & 20 & 50 \\ \hline 660 & 70 & -100 \\ \hline 220 & 40 & -10 \\ \hline 0 & -50 & 40 \\ \hline 99 & 13 & -17 \\ \hline \end{array} \quad /110$$

e) On fait comme à l'exercice 1, avec  $\underline{c}_B = (0, c_1, c_2)$  et  $\underline{c}_N = (0, 0)$ .

$$0 \leq \underline{c}_B(B^{-1}N) - \underline{c}_N = \frac{1}{17} \begin{pmatrix} 5c_1 - 3c_2 \\ -1c_1 + 4c_2 \end{pmatrix}$$

Cela nous donne un système d'inégalité linéaire en  $c_1$  et  $c_2$ .

### Exercice 3

<i>(Primal)</i>	$\longrightarrow$	<i>(Dual)</i>
$\begin{array}{rcl} \max z = & & -6x_3 - 3x_4 \\ \text{s.c.} & + x_1 & - x_3 + x_4 = 2 \\ & + x_2 + x_3 & + 2x_4 = -3 \\ & & x_i \geq 0 \end{array}$		$\begin{array}{rcl} \min w = & 2\lambda_1 - 3\lambda_2 & \\ \text{s.c.} & + \lambda_1 & \geq 0 \\ & & + \lambda_2 \geq 0 \\ & - \lambda_1 + \lambda_2 & \geq -6 \\ & + \lambda_1 + 2\lambda_2 & \geq -3 \\ & & \lambda_j \in \mathbb{R} \end{array}$

Si on fixe  $\lambda_1 = 0$  et qu'on fait tendre  $\lambda_2 \rightarrow -\infty$ , on obtient une famille de solution dual-admissible qui font tendre la fonction objectif  $w$  vers  $-\infty$ . Nous sommes donc dans un cas où le dual n'a pas d'optimum fini, et où le primal n'a pas de solution admissible.