Mathématiques Discrètes / Recherche Opérationnelle MA 11, 08h30

SB - IMA - ROSE, Prof. D. de Werra

Compilé le 14 mars 2008

Corrigé 16

06.03.2008

Exercice 1

a) Il suffit de numéroter les sommets selon leur rang à l'aide de l'algorithme vu au cours du 15.11.07. On groupe ensuite dans une même classe i les sommets de même rang i.
On constate que cette numérotation satisfait nos trois conditions, car sinon on a à chaque fois une contradiction :
- pour tout $i < j$ il n'y a pas d'arc (x, y) avec $x \in C_j$ et $y \in C_i$, car sinon cela impliquerait que y avait un prédécesseur au moment où il est entré dans C_i, ce qui n'est pas possible avec l'algorithme.
- pour tout i, deux sommets de C_i ne sont pas reliés entre eux, car sinon cela impliquerait de nouveau que l'un d'eux avait un prédécesseur au moment où il est entré dans C_i, ce qui n'est pas non plus possible avec l'algorithme.
- pour tout $i > 0$, chaque sommet de C_i a au moins un prédécesseur dans la classe C_{i-1}, car sinon un tel sommet x était déjà sans prédécesseur à une étape $j < i$, et ne devrait donc pas se trouver dans C_i.

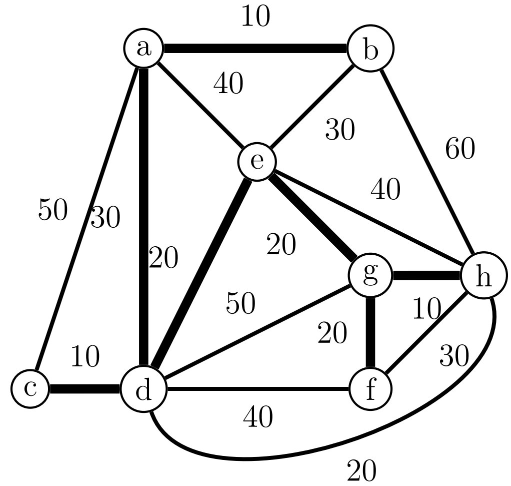
b) Le nombre de classes est égal à 1 plus la longueur (=nombre d'arcs) du plus long chemin (=chaîne orientée) dans le graphe.

c) Non, car s'il y a un circuit C, il ne pourra jamais y avoir un moment où un sommets x de C est sans prédécesseur au moment où l'on souhaite l'introduire dans une classe (si cette condition n'est pas satisfaite, on viole la première ou la deuxième contrainte).

d) $C_0 = \{e\}$ $C_1 = \{b\}$ $C_2 = \{c, d\}$ $C_3 = \{a, h\}$ $C_4 = \{f, g\}$

Exercice 2

Ce problème est équivalent à trouver un arbre max de poids min dans le graphe. On peut donc appliquer l'algorithme glouton vu au cours.
Dans le graphe proposé, nous trouvons par exemple (parmi plusieurs possibilités) l'arbre ci-contre :



Exercice 3

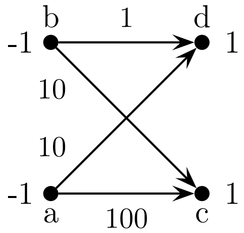
a) On transporte 2 unités sur (a,e), (d,e), (e,c), et 3 unités sur (b,d). On constate de plus que pour tout arc (i,j) hors-base on vérifie $c_{ij} + \lambda_i - \lambda_j \geqslant 0$, ce qui nous indique que cette solution est optimale.

b) Fixons s.p.g. $\lambda_a = 0$, ce qui nous donne $\lambda_e = 3$, $\lambda_d = 1$, $\lambda_b = 0$, et $\lambda_c = \lambda_e + c_{ec} = 3 + c_{ec}$. Pour que la solution reste optimale si c_{ec} varie, il faut que les contrainte $c_{ij} + \lambda_i - \lambda_j \geqslant 0$ pour les arcs hors-base (i,j) qui dépendent du coût c_{ec} soit toujours vérifiée.

Dans notre cas, il s'agit des arcs (a,c) et (c,d), qui nous donnent les deux contraintes suivantes pour c_{ec} :

$$c_{ac} + \lambda_a - \lambda_c \geqslant 0 \quad \Longrightarrow \quad 6 + 0 - (3 + c_{ec}) \geqslant 0 \quad \Longrightarrow \quad c_{ec} \leqslant 3$$
$$c_{cd} + \lambda_c - \lambda_d \geqslant 0 \quad \Longrightarrow \quad 7 + (3 + c_{ec}) - 1 \geqslant 0 \quad \Longrightarrow \quad -9 \leqslant c_{ec}$$

c) Non. Voici un contre-exemple où la méthode proposée ne fonctionne pas :



Exercice 4

Pour la modélisation, se référer à l'exemple du paragraphe 4 (cours du 06.03.2008).
Les tables optimales sont les suivantes :

pour X_0

X_0	1	2	3	4
$f_0(X_0)$	-80	-50	-20	0

pour X_1

X_1	1	2	3	4
$f_1(X_1)$	-10	30	100	120
D_1	G	G	G ou C	C